ՀՏԴ 37.02

Մաթեմատիկական տրամաբանական խնդիրները որպես ստեղծագործական մտածողության զարգացման միջոց*

Գագիկ Նիկողոսյան

DOI: https://doi.org/ 10.58726/27382923-ne2023.1-110

Հանգուցային բառեր. *ապացուցել, հերքել, զույգություն, բաժանելիություն, ինվարիանտ, տարածական մարմին, փռվածք, հմտություն*

Ներածություն: Արդի աշխարհը գլոբալ զարգացումների, սրընթաց փոփոխությունների աշխարհ է. Ոչ մի բան ապահովագրված չէ փոխվելու, հնանալու կամ վերանալու վտանգից: Տեղեկատվական պայթյունը հանգեցրեց տեղեկույթի ծավալի շեշտակի աճի. Գիտական հայտնագործություններն աննախադեպ արագությամբ հաջորդում են մեկը մյուսին, զուգահեռաբար, առավել մեծ ընդգրկումով ու արագությամբ ընթանում է տեխնոլոգիական զարգացումը: Այս զարգացումները փոփոխություններ են մտցնում մարդկանց կենսակերպում ու աշխարհայացքում, խարխլվում են ավանդույթները, ձևավորվում են նոր արժեքներ: Կյանքը հասարակությանն ապրելու և գործելու նոր ռազմավարության է պարտադրում: Այդ նոր ռազմավարության մշակումն էլ ամենաընդհանուրի մասով կազմում է ժամանակակից կրթական քաղաքականության բովանդակությունը:

Կրթության ոլորտի շատ մասնագետների կարծիքով XX-րդ դարն իրավամբ համարվում է հանրակրթության ձևավորման ու զարգացման դար: Սակայն այսօր գրեթե բոլոր զարգացած երկրները, չբավարարվելով իրենց իսկ երկրի կրթության, մասնավորապես հանրակրթության փաստացի վիճակով, կարևորում են այդ համակարգի անընդհատ բարեփոխման հիմնահարցը: Հայտնի է, որ կրթության որակի բարձրացման, գիտատեխնիկական առաջընթացի, տնտեսական ներուժի զարգացման գործում վճռորոշ դեր ունի հենց դպրոցականների և ուսանողների մաթեմատիկական կրթությունը [6]: Պայմանավորված հասարակության զարգացման և նրա տեխնիկատնտեսական կարիքների բավարարման պահանջներով՝ անընդհատ ընդլայնվում և փոփոխվում են մաթեմատիկայի ուսուցման նպատակները, ինչն էլ էական պահանջներ է դնում ոչ միայն մաթեմատիկայի բովանդակության փոփոխության, այլ նաև ուսումնա-

* *Հետազոտությունն իրականացվել է ՇՊՀ-ի կողմից տրամադրվող ֆինանսական աջակցության շնորհիվ՝ № ShSU 02-SCI-2022 ծածկագրով գիտական թեմայի շրջանակներում:*

կան ծրագրերով սահմանվող սովորողների մաթեմատիկական պատրաստվածության մակարդակի վրա:

Բուն մաթեմատիկա գիտության անընդհատ զարգացումը, նրանում նոր, կարևոր բնագավառների առաջացումը առաջ են բերում մի կողմից ուսումնական առարկայի համապատասխան նորացման անհրաժեշտություն, մյուս կողմից իրենց ճանաչողական նշանակությունն ու գործնական արժեքը կորցրած թեմաների կրճատում, հեռացում ծրագրից (օրինակ, կոմբինատորիկայի և բազմությունների տեսության տարրերի մուտք, մաթեմատիկական անալիզի, մաթեմատիկական տրամաբանության, վիճակագրության ու հավանականությունների տեսության տարրերի մուտք, լոգարիթմական հաշվեքանոնի հեռացում ծրագրից և այլն):

Կրթության արդի զարգացումներում առանձին կարևորություն է ստանում ստեղծագործ (կրեատիվ), տրամաբանող, քննադատական մտածողությամբ օժտված անձի ձևավորումը, ինչը բոլոր ժամանակներում (և մեր ժամանակներում՝ առավել ևս) համարվել ու համարվում է անձի ամենակարևոր որակը: Ստեղծագործական ակտիվության չափանիշներ կարող են համարվել ինտելեկտուալ նախաձեռնության դրսևորումը, օպտիմալ մոտիվացիայի առկայությունը, ստեղծագործական ընդունակությունների և կարողությունների, տրամաբանական և ստեղծագործական մտածողության զարգացման մակարդակը: Ի նկատի ունենալով մաթեմատիկայի ուսուցման հանրակրթական, դաստիարակչական և գործնական նպատակները (մասնավորաբար, մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի դաստիարակչական նպատակներից հիմնականը սովորողների ստեղծագործական և տրամաբանական մտածողության ձևավորումն ու զարգացումն է [1])՝ կարող ենք փաստել, որ վերոգրյալը լավագույնս կարելի է ապահովել՝ մաթեմատիկա ուսուցանելով, մասնավորապես, մաթեմատիկայի դասավանդման պրոցեսում հնարավորինս շատ ներառելով բանաձևային գիտելիքների իմացություն չպահանջող տրամաբանական խնդիրներ:

Այս համատեքստում սույն աշխատանքը նվիրված է մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպող և/կամ այդ դասընթացի իմացության շրջանակում դիտարկվող տարբեր ոչ տիպային բազմամակարդակ տրամաբանական խնդիրների նպաստող դերի վերհանմանը ուսուցման արդյունավետության և ըստ այդմ կրթության որակի բարձացման գործընթացներում: Մասնավորապես հոդվածում.

ա) վեր է հանված զույգության, բաժանելիության, ինվարիանտի կիրառման, երրորդի բացառման օրենքի կիրառման վերաբերյալ ընտ-

բովի բազմամակարդակ խնդիրների նպաստող դերը սովորողների մոտ ապացուցման և/կամ հերքման հմտությունների ձևավորման և զարգացման պրոցեսում,

բ) վեր է հանված տարածական մարմինների և փռվածքների վերաբերյալ տրամաբանական խնդիրների նպաստող դերը սովորողների որոնողական ընդունակությունների, ստեղծագործական և տարածական մտածողության ձևավորման և զարգացման պրոցեսում,

գ) վերոգրյալ տիպերի տրամաբանական խնդիրների լուծման համար տրված են մեթոդական ցուցումներ՝ լուծումների հիմքում դնելով տրամաբանորեն հիմնավորված դատողության առկայությունը,

ինչն էլ աշխատանքի գիտամանկավարժական նորույթն է։

1. **Ապացուցման և/կամ հերքման վերաբերյալ ընտրովի տրամաբանական խնդիրներ։** Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի շրջանակում հաճախ հանդիպում ենք պնդումների և խնդիրների, որոնց ապացուցման կամ հերքման հիմքում ընկած են տարբեր եղանակներով հիմնավորվող կոնկրետ տրամաբանական դատողությունները, ինչի վառ օրինակ է հակասող ենթադրության մեթոդը։ Այս մեթոդի համաձայն, նախապես ենթադրում ենք, որ ապացուցման ենթակա պնդումը սխալ է։ Եթե այդ ենթադրությունը տրամաբանական դատողությունների միջոցով հանգեցնում է հակասության, եզրակացնում ենք, որ մեր ենթադրությունը սխալ է, այսինքն՝ տրված պնդումը ճշմարիտ է [1]։ Այս մեթոդի վերաբերյալ իր ուշագրավ և դիպուկ կարծիքն է հայտնել նաև անգլիացի հայտնի մաթեմատիկոս Գոդֆրի Հարոլդ Հարդին [8]։ *Ըստ Հարդիի՝ հակասող ենթադրության մեթոդը մաթեմատիկայի ամենանրբագեղ զենքերից մեկն է, այն անհամեմատ ավելի գեղեցիկ հնարք է, քան ցանկացած շախմատային գամբիտ, քանզի հաջողության հասնելու համար շախմատիստը կարող է զոհաբերել զինվոր կամ նույնիսկ ֆիգուր, մինչդեռ մաթեմատիկոսը դիմում է ողջ պարտիան պարտվելու ռիսկին։*

Բովանդակային իմաստով ապացուցումը տրամաբանական գործողություն է, որի ընթացքում ինչ-որ մտքի ճշմարտություն հիմնավորվում է այլ մտքերի (դատողությունների) օգնությամբ։ Բոլոր գիտություններում էլ (հատկապես բնագիտամաթեմատիկական) ապացուցելու հարկ կա։ Ընդ որում՝ այն մտքերի, դատողությունների բովանդակությունը, որոնց ճշմարիտ լինելը պահանջվում է հիմնավորել, յուրաքանչյուր գիտությունում, բնականաբար, տարբեր է։ Տրամաբանություն գիտությունն էլ հենց գտնում է այն ընդհանուրը, որը բնութագրական է բոլոր այդ ապացուցումների համար՝ անկախ այս կամ այն ապացուցման կոնկրետ բովանդակությունից: Առհասարակ, տրամաբանության մեջ յուրաքանչյուր բովանդակային ապացուցման մեջ առանձնացնում են երեք կառուցվածքային տարրեր՝ թեզիս, հիմք և կշռադատություն [3]:

Թեզիս կոչվում է այն պնդումը, որի ճշմարիտ լինելը պահանջվում է ապացուցել:

Հիմք կոչվում է այն առաջադրությունը, պնդումը, որի ճշմարիտ լինելը նախկինում արդեն ապացուցված է, և որը կարող է օգտագործվել թեզիսի ճշմարիտ լինելը հիմնավորելիս:

Կշռադատությունը կամ փաստարկումն այն եղանակն է, որի միջոցով թեզիսի ճշմարիտ լինելը բխում է ապացուցման հիմքերից և փաստարկներից: Ըստ էության կշռադատությունը կիրառված ապացուցման մեթոդն է, որն ապացուցողական մտահանգումների որոշակի հաջորդականություն է:

Առհասարակ, տրամաբանության մեջ դիտարկվում են տրամաբանական մտածողության չորս հիմնական օրենքներ, որոնք կազմում են ցանկացած կշռադատության հիմքը: Դրանք են՝ նույնության, հակասության, երրորդի բացառման և բավարար հիմունքի օրենքները [2]:

Նույնության օրենքը պահանջում է, որ յուրաքանչյուր միտք որոշակի, հաստատուն իմաստով կիրառվի կշռադատության ընթացքում: Օրինակ, անթույլատրելի է, որ բազուկ բառը կշռադատության մի փուլում կիրառվի կամ ընկալվի որպես ճակնդեղ, մեկ այլ փուլում՝ որպես ձեռք (թև), իսկ մյուսում՝ ֆիզիկական մեծություն հանդիսացող ուժի բազուկ: Նման կշռադատությունը տրամաբանական չի լինի:

Նույնության օրենքի նշանակությունն այն է, որ նրա պահանջին հետևելով՝ պահպանում ենք մեր մտքերի որոշակիությունը կշռադատելու ընթացքում:

Հակասության օրենքի համաձայն երկու հակադիր դատողություններ չեն կարող միաժամանակ ճշմարիտ լինել:

Դիտարկենք հակադիր դատողություններ:

Ուղիղ պրիզմայի ծավալը կախված չէ հիմքի բազմանկյան մակերեսից:

Ուղիղ պրիզմայի ծավալը կախված է հիմքի բազմանկյան մակերեսից:

Պարզ է, որ վերոգրյալ հակադիր դատողությունները, հակասության օրենքի համաձայն, միաժամանակ չեն կարող լինել ճշմարիտ:

Հակասության օրենքի նշանակությունն այն է, որ նրա պահանջին հետևելով՝ մենք պահպանում ենք մեր մտքերի անհակասականությունը կշռադատելու ընթացքում:

Անհրաժեշտ է ուշադրություն դարձնել այն էական հանգամանքի վրա, որ հակասության օրենքը տարածվում է հակադիր դատողությունների, այսինքն՝ ինչպես հակադեմ, այնպես էլ հակասող դատողությունների վրա և գտնում է, որ դրանք միաժամանակ ճշմարիտ չեն կարող լինել, բայց այս օրենքը չի բացառում երկու հակադիր դատողությունների միաժամանակյա սխալ լինելը: Այս «բացը» լրացնում է ***երրորդի բացառման օրենքը***, համաձայն որի՝ երկու հակադիր դատողություններից մեկն անպայման ճշմարիտ է, մյուսը՝ կեղծ, երրորդ ելքը բացառված է: Անհրաժեշտ է հստակ ընդգծել, որ երրորդի բացառման օրենքը չի պատասխանում այն հարցին, թե երկու հակադիր դատողություններից որն է ճշմարիտ, և որը՝ կեղծ: Այդ հարցի պատասխանը դուրս է մնում այս օրենքի իրավասությունից: Պետք է նկատի ունենալ, որ եթե հակասող դատողություններից մեկը ճշմարիտ է, ապա հետևողական պետք է լինենք՝ մյուս դատողությունը սխալ համարենք, և հակառակը: Երրորդի բացառման օրենքի նշանակությունն այն է, որ նրա պահանջը կատարելով՝ ապահովում ենք մեր մտքի հետևողականությունը:

Եվ, վերջապես, ***բավարար հիմունքի օրենքի*** համաձայն, յուրաքանչյուր ճշմարիտ միտք կշռադատության ընթացքում պետք է անհրաժեշտաբար ունենա իր տրամաբանական հիմքը (բխի այլ ճշմարիտ մտքերից):

Բավարար հիմունքի օրենքի նշանակությունն այն է, որ այդ օրենքի պահանջին հետևելով՝ մենք ապահովում ենք մեր մտքերի հիմնավորվածությունը:

Ըստ էության, տրամաբանական այս չորս անկյունաքարային օրենքներն իրենց լավագույն դրսևորումն են գտել ապացուցման հիմնական մեթոդներից մեկի՝ հակասող ենթադրության մեթոդի կառուցակարգում:

Այս մեթոդի՝ որպես տրամաբանական բովանդակային ապացուցման, հիմքը կազմում են հակասության և երրորդի բացառման օրենքները, իսկ կշռադատությունը ներառում է նույնության և բավարար հիմունքի օրենքները:

Հակասող ենթադրության մեթոդի համաձայն, ենթադրում ենք, որ ապացուցման ենթակա ելակետային պնդումը սխալ է: Եթե այս ենթադրությունը տրամաբանական դատողությունների միջոցով հանգեցնում է հակասության, եզրակացնում ենք, որ մեր ենթադրությունը սխալ է, այսինքն՝ տրված ելակետային պնդումը ճշմարիտ է:

Ըստ էության, A պնդման ճշմարտացիությունն ապացուցելու փոխարեն ապացուցում ենք, որ նրա ժխտումը սխալ է, ինչը, բավարար հիմունքի, հակասության և երրորդի բացառման օրենքների համաձայն, համարժեք է A պնդման ճշմարիտ լինելուն:

Դասավանդման տարիների փորձառությունը վկայում է այն մասին, որ աշակերտը, ով առաջին անգամ ծանոթանում է հակասող ենթադրության մեթոդի էությանը, տարակուսանք է հայտնում առ այն, թե ի՞նչ տարբերություն, ես ապացուցելու եմ *A* պնդման ճշմարտացիությունը, թե վերջինիս ժխտման սխալ լինելը, միևնույնն է, եթե մեկը կարողանամ ապացուցել, ինքնաբերաբար մյուսն էլ կապացուցեմ, և կարծես խիստ թերահավատորեն է մոտենում այս մեթոդի կիրառման արդյունավետությանը: Առաջին հայացքից այդպիսի հարցադրումը կարծես իր մեջ ճշմարտության թվացյալ հատիկ պարունակում է: Մինչդեռ տարբեր տիպային և ոչ տիպային խնդիրների քննարկման շնորհիվ է, որ աշակերտը կարողանում է լիարժեք ընկալել այս մեթոդի էությունը, արդյունավետ կիրառման հնարավորություններն ու սահմանները:

Հարկ է նշել, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպում են ապացուցման և/կամ հերքման վերաբերյալ տարբեր խնդիրներ, որոնց լուծման ժամանակ հակասող ենթադրության մեթոդի կիրառման արդյունքում դժվար է անմիջականորեն «հանգել» հակասության, դեռ ավելին, ի սկզբանե ամենևին պարզ չէ, թե ինչի «շնորհիվ» կարող ենք հանգել հակասության: Ըստ էության պետք է փաստենք, որ, որպես կանոն, հակասության հանգելու համար հակասող ենթադրության մեթոդին «զուգահեռ» անհրաժեշտ է կիրառել մեկ այլ մեթոդ և/կամ հնարք ևս: Որպես այդպիսիք կարող է հանդես գալ ինվարիանտը (երբ տվյալ խնդրի պայմաններում որևէ մեծություն կամ մեծության որևէ հատկություն, օրինակ զույգություն, բաժանելիություն, մնում է անփոփոխ) [4]: Անհրաժեշտ է հստակ ընդգծել, որ հակասող ենթադրության մեթոդի և հավելյալ որևէ հնարք(ներ)ի և/կամ մեթոդ(ներ)ի համատեղ կիրառման արդյունքում է միայն հնարավոր լինում կիրարկել հակասող ենթադրության մեթոդի գործիքակազմը և հասնել առաջադրված խնդրի լուծմանը: Այդպիսի հավելյալ արդյունավետ մեթոդներից մեկն էլ հենց ինվարիանտի կիրառման մեթոդն է, որն ապահովում է ապացուցման և/կամ հերքման տարբեր խնդիրներում հակասող ենթադրության մեթոդի արդյունավետ կիրարկումը:

Դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

Խնդիր 1: Հաջորդականության առաջին անդամը 1 է, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ անդամ ստացվում է իր նախորդից՝ վերջինիս ավելացնելով իր թվանշանների գումարը: Պարզել, կարո՞ղ է արդյոք 765432 թիվը լինել այդ հաջորդականության անդամ [4]:

Լուծում: Ինչպես գիտենք, յուրաքանչյուր բնական թիվ 3-ի վրա բաժանելիս տալիս է նույն մնացորդը, ինչ այդ թվի թվանշանների գումարը:

Հեշտ է նկատել, որ տրված հաջորդականության առաջին անդամը չի բաժանվում 3-ի, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ անդամ 3-ի վրա բաժանելիս տալիս է 2 կամ 1 մնացորդ: Եվ ուրեմն կարող ենք պնդել, որ այս հաջորդականության պարագայում ինվարիանտ է մնում հաջորդականության անդամի՝ 3-ի վրա չբաժանվելու հատկությունը: Քանի որ 765432 բնական թիվը բաժանվում է 3-ի, կնշանակի այն տվյալ հաջորդականության անդամ չի կարող լինել:

Խնդիր 2: 5x5 չափսերի քառակուսային ցանցի յուրաքանչյուր վանդակում նստած է մեկ մորեխ: Կրակոցից հետո յուրաքանչյուր մորեխ տեղափոխվում է հարևան որևէ վանդակ (երկու վանդակներ համարվում են հարևան, եթե ունեն ընդհանուր կողմ): Ապացուցել, որ կրակոցից հետո վանդակներից առնվազն մեկում մորեխ չի լինի [4]:

Լուծում: A-ով նշանակենք հետևյալ պնդումը. «կրակոցից հետո վանդակներից առնվազն մեկում մորեխ չի լինի»: Կատարենք հակասող ենթադրություն ($\overline{A}$), այն է՝ «կրակոցից հետո բոլոր վանդակներում կլինեն մորեխներ»: Փորձենք ապացուցել, որ մեր նախնական ենթադրությունը, այն է՝ $\overline{A}$ պնդումը կեղծ է: Տրված քառակուսային ցանցի վանդակները ներկենք շախմատաձև՝ սև և սպիտակ գույներով (ստորին ձախ վանդակը կներկենք սև գույնով): Արդյունքում կունենանք 13 սև և 12 սպիտակ գույնի վանդակներ: Հեշտ է նկատել, որ երկու կամայական հարևան վանդակներ կլինեն տարբեր գույների (կնշանակի կրակոցից հետո յուրաքանչյուր մորեխ կհայտնվի այլ գույնի վանդակում, ըստ այդմ ինվարիանտ է մնում մորեխի զբաղեցրած վանդակի գույնի չպահպանման հատկությունը), հետևաբար ակնհայտ է, որ կրակոցից հետո 13 սև վանդակերից յուրաքանչյուրում գտնվող մորեխները կլքեն այդ վանդակները՝ տեղափոխվելով հարևան վանդակներ, և թվով 13 այդ նույն սև վանդակներում կարող են հայտնվել միայն թվով 12 սպիտակ վանդակներում գտնվող մորեխները և, ուրեմն, սև վանդակներից առնվազն մեկը կմնա դատարկ: Կնշանակի, մեր նախնական ենթադրությունը սխալ է, ըստ այդմ խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Խնդիր 3: Սարդը գտնվում է անվերջ քառակուսային ցանցի վանդակներից մեկում: Յուրաքանչյուր քայլում սարդը տեղափոխվում է իր վերին, ստորին, աջ կամ ձախ հարևան վանդակներից որևէ մեկը: Կարո՞ղ է արդյոք n քայլերից հետո սարդը վերադառնալ իր սկզբնական դիրքը, եթե.

ա/ $n=1967$, բ/ $n=1968$ [5]:

Լուծում: Ենթադրենք n քայլերից հետո սարդը կարող է վերադառնալ իր սկզբնական դիրքը: Անվերջ քառակուսային ցանցը շախմատաձև ներկենք սև-սպիտակ գույներով այնպես, որ սարդը սկզբում գտնվի սպիտակ վանդակում: Հեշտ է նկատել, որ յուրաքանչյուր հաջորդ քայլում սարդը տեղափոխվում է այլ գույնի վանդակ, քանի որ շախմատաձև ներկման դեպքում ամեն մի վանդակի աջ, ձախ, վերին կամ ստորին հարևան վանդակը կլինի այլ գույնի՝ տվյալ վանդակի գույնի հետ համեմատած:

Համաձայն վերոգրյալի կարող ենք պնդել, որ կամայական զույգ թվով քայլերից հետո սարդը կհայտնվի նույն գույնի վանդակում, ինչ գույնի վանդակից որ սկսել էր շարժվել (առաջին ինվարիանտ), իսկ կամայական կենտ թվով քայլերից հետո սարդը կհայտնվի այլ գույնի վանդակում, ինչ գույնի վանդակից որ սկսել էր շարժվել (երկրորդ ինվարիանտ), հետևաբար, համաձայն այս ինվարիանտների, կարող ենք պնդել, որ n=1967 կամայական քայլերից հետո սարդը չի կարող վերադառնալ իր սկզբնական դիրքը, իսկ n=1968 որոշակի քայլերից հետո սարդը կարող է վերադառնալ իր սկզբնական դիրքը (օրինակ, բավական է կատարել $1968/2 = 984$ քայլ վերև և նույնքան քայլ դեպի ներքև):

Պատ.՝ ա/ հնարավոր չէ, բ/ հնարավոր է:

Խնդիր 4: Քառակուսու երեք գագաթներում նստած են մորեխներ: Յուրաքանչյուր քայլում մորեխներից որևէ մեկը փոխում է իր դիրքը՝ զբաղեցնելով նոր դիրք, որը համաչափ է մյուս երկու մորեխներից որևէ մեկի նկատմամբ: Ապացուցել, որ մորեխներից և ոչ մեկը չի կարող որոշակի քայլերից հետո զբաղեցնել քառակուսու չորրորդ գագաթը [5]:

Լուծում: Դիտարկենք ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգ այնպիսին, որ քառակուսու այն գագաթները, որոնցում նստած են մորեխները, ունենան հետևյալ կոորդինատները՝ (0; 0), (1; 0) և (0; 1): Պարզ է, որ այս դեպքում քառակուսու չորրորդ գագաթը կունենա (1; 1) կոորդինատները, և բացի այդ հեշտ է նկատել, որ յուրաքանչյուր քայլում որևէ մորեխի զբաղեցրած նոր դիրքի կոորդինատներից յուրաքանչյուրի զույգությունը մնում է անփոփոխ (ինվարիանտ), հետևաբար ակնհայտ է, որ և ոչ մի մորեխ որոշակի վերջավոր քայլերից հետո չի կարող զբաղեցնել քառակուսու չորրորդ գագաթը, որի երկու կոորդինատներն էլ կենտ են: Խնդրի պնդումն ապացուցված է:

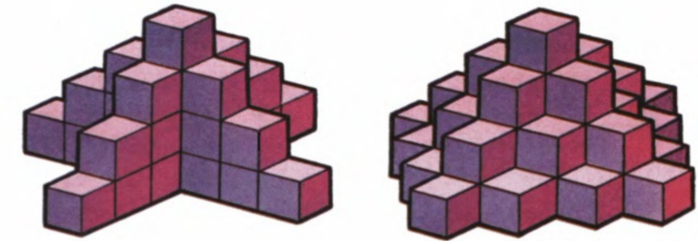
Ինչպես տեսնում ենք, տարբեր խնդիրներում ինվարիանտ են մնում տարբեր մեծություններ կամ մեծությունների տարբեր հատկություններ, մասնավորապես խնդիր 1-ում ինվարիանտ էր մնում հաջորդականության յուրաքանչյուր անդամի՝ 3-ի վրա չբաժանվելու հատկությունը, խնդիր 2-ում՝ մորեխի զբաղեցրած վանդակի գույնի չպահպանման հատկությունը, խնդիր 3-ում՝ զույգ թվով քայլերից հետո նույն գույնի վանդակում հայտնվելու հատկությունը (առաջին ինվարիանտ) և կենտ թվով քայլերից հետո այլ գույնի վանդակում հայտնվելու հատկությունը (երկրորդ ինվարիանտ), խնդիր 4-ում՝ զբաղեցրած նոր դիրքի կոորդինատներից յուրաքանչյուրի զույգությունը: Ընդ որում նկատենք, որ եթե 1-3 խնդիրներում ինվարիանտ հանդիսացող հատկությամբ օժտված էր խնդրում դիտարկվող օբյեկտը (հաջորդականության անդամ կամ վանդակ), ապա խնդիր 4-ում ինվարիանտ հանդիսացող հատկությամբ օժտված օբյեկտը ներմուծվել էր մեր կողմից: Ըստ էության առկա և ներմուծվող այդպիսի օբյեկտների շնորհիվ էլ կարելի է ապահովել նմանօրինակ խնդիրների աստիճանական բարդացում:

2. **Տարածական մարմինների և վերջիններիս փռվածքների վերաբերյալ տրամաբանական խնդիրներ:** Դասավանդման տարիների փորձառությունը վկայում է, որ տեսանելի աշխարհը ճշգրիտ ընկալելու, առաջին տպավորությունների վերափոխումներ և փոփոխություններ կատարելու, ինչպես նաև տեսողական փորձի ասպեկտները վերստեղծելու ունակության ձևավորման և զարգացման համար, նույնիսկ համապատասխան ֆիզիկական առարկայի բացակայության պայմաններում, տարածական մարմինների և փռվածքների վերաբերյալ տրամաբանական խնդիրները կարող են հանդիսանալ լավագույն արդյունավետ գործիք: Դեռ ավելին, միջին դպրոցում նմանօրինակ խնդիրների դիտարկումը լավագույն նախադրյալը կհանդիսանա հետագայում երկրաչափության դասընթացի սերտման և յուրացման համար, քանզի հենց ֆորմալ բանաձևային գիտելիքներ չպահանջող տարածական մարմինների և վերջիններիս փռվածքների վերաբերյալ տրամաբանական խնդիրներն են, որ լավագույնս նպաստում են սովորողների տարածական մտածողության ձևավորմանը և զարգացմանը:

Դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

Խնդիր 5: Քանի միավոր կողով խորանարդիկներից են կազմված նկար 1-ի ա-ում և բ-ում պատկերված «աշտարակները» [7]:

Լուծում: Նախ հաշվենք նկար 1-ի ա-ում պատկերված «աշտարակում» առկա միավոր կողով խորանարդիկների քանակը: Պարզ է, որ այդ «աշտարակը» կազմված է 1x1x4 չափսերի կենտրոնական ուղղանկյունանիստից և չորս միանման մասերից, հետևաբար «աշտարակում» առկա միավոր կողով խորանարդիկների քանակի համար կունենանք՝ $4+4\cdot(1+2+3)=28$:



ա) բ)

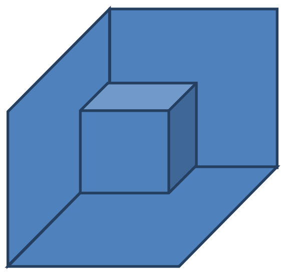
***Նկար 1. Միավոր կողով խորանարդիկներից կազմված** «աշտարակներ»*

Այժմ հաշվենք նկար 1-ի բ-ում պատկերված «աշտարակում» առկա միավոր կողով խորանարդիկների քանակը: Ի նկատի ունենալով ա-ի արդյունքը՝ հեշտ է նկատել, որ նկար 1-ի բ-ում պատկերված «աշտարակն» ստացվել է նկար 1-ի ա-ում պատկերված «աշտարակից»՝ վերջինիս չորս միանման մասեր ավելացնելով, հետևաբար նկար 1-ի բ-ում պատկերված «աշտարակում» առկա միավոր կողով խորանարդիկների քանակի համար կունենանք՝ $28+4\cdot(1+3)=44$:

Պատ.՝ ա) 28, բ) 44:

Խնդիր 6: Ինչպես կմեկնաբանեք նկար 2-ում պատկերված տարածական մարմինը:

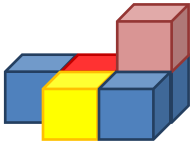
Լուծում: Դասավանդման տարիների փորձառությունը վկայում է, որ հենց նմանօրինակ առաջադրանքներն են, որ դեռևս միջին դպրոցում հնարավորություն են տալիս սովորողների մոտ լավագույնս ձևավորել և զարգացնել տարածական մտածողություն, գծագիր «տեսնելու» հմտություն և ունակություն: Նկար 2-ը կարելի է մեկնաբանել ինչպես անկյունում պատկերված խորանարդ, այնպես էլ մեծ ուղղանկյունանիստ, որից հեռացված է փոքր խորանարդաձև մաս:



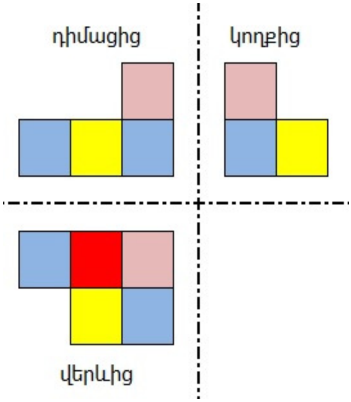
Նկար 2. Տարածական մարմին

Խնդիր 7: Նկար 3-ում պատկերված է վեց խորանարդներից կազմված տարածական մարմին: Կառուցել տրված տարածական մարմնի պատկերները դիմացից, վերևից և կողքից:

Լուծում: Նկար 4-ում բերված են տրված տարածական մարմնի պատկերները դիմացից, վերևից և կողքից:



Նկար 3. Վեց խորանարդներից կազմված տարածական մարմին



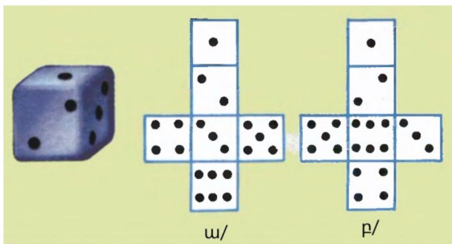
Նկար 4. Տարածական մարմնի պատկերը դիմացից, վերևից և կողքից

Հարկ ենք համարում ընդգծել, որ ելակետային տարածական մարմնում դիտարկելով տարբեր գույնի խորանարդներ՝ հնարավորություն ենք ստեղծում սովորողին ավելի հեշտ կողմնորոշվելու տարածական մարմնի՝ տարբեր դիրքերից պատկերների կառուցման համար:

Դասավանդման տարիների փորձառությունը վկայում է, որ թեմատիկայի լավագույնս յուրացման համար նմանօրինակ առաջադրանքներ դիտարկելիս, բացի համապատասխան պատկերների կառուցումից, անհրաժեշտ է յուրաքանչյուր դիրքին համապատասխան առանձին քննարկման առարկա դարձնել նաև չերևացող խորանարդները:

Աստիճանական բարդացում ապահովելու համար կարելի է դիտարկել նաև հակադարձ խնդիրը, երբ տալով տարածական մարմնի պատկերները դիմացից, վերևից և կողքից՝ պահանջվում է վերականգնել բուն տարածական մարմինը:

Խնդիր 8: Նկար 5-ում պատկերված է խաղային զառ և զառերի երկու փռվածքներ: Պարզել՝ փռվածքներից որոնք կարող են համապատասխանել տրված զառին [7]:



Նկար 5. Խաղային զառ և զառերի երկու փռվածքներ

Լուծում: Նկատենք, որ ա/ փռվածքում «1»-ը և «3»-ը գտնվում են զուգահեռ նիստերի վրա, հետևաբար ա/ փռվածքը չի համապատասխանում տրված զառին, իսկ բ/ փռվածքը համապատասխանում է տրված զառին, քանզի ինչպես զառի, այնպես էլ փռվածքի պարագայում «1»-ը և «2»-ը, «1»-ը և «3»-ը, «2»-ը և «3»-ը գտնվում են հարևան նիստերի վրա:

Նմանօրինակ խնդիրներում աստիճանական բարդացում ապահովելու համար կարելի է նախապես պահանջել պատկերել զառի մի քանի կամ բոլոր հնարավոր փռվածքները, որից հետո դիտարկել հակադարձ խնդիրը, երբ ըստ փռվածքի անհրաժեշտ է պարզել զառի նիստերի թվերը: Կարելի է դիտարկել նաև այնպիսի տարբերակներ, որոնցում զառի և փռվածքի համեմատության ժամանակ անհրաժեշտ լինի ուշադրություն դարձնել նաև «2»-ի և «3»-ի կետերի «թեքություններին»:

3. **Եզրակացություն:** Ամփոփելով կարող ենք փաստել, որ տրամաբանական խնդիրների լուծման միջոցով ձևավորված գիտելիքները, կարողություններն ու հմտությունները արտահայտում են իմացության այն մակարդակը, երբ սովորողը, դրսևորելով որոնողական ընդունակություններ, կարողանում է գործնականում կիրառել ձեռք բերված տեսական գիտելիքները, կատարել տրամաբանական դատողություններ, գնահատել դրանք, կատարել կշռադատված վերլուծություններ և եզրահանգումներ: Կարծում ենք՝ հենց նմանօրինակ խնդիրներն են, որ չպահանջելով բանաձևային գիտելիքների իմացություն, հնարավորություն են տալիս սովորողների մոտ զարգացնել դիտարկելու, կռահելու, եզրակացություններ անելու կարողություններ և հմտություններ, տրամաբանական և ստեղծագործական մտածողություն՝ վերջնարդյունքում նպաստելով ուսուցման արդյունավետության և կրթության որակի բարելավմանը:

DOI: https://doi.org/ 10.58726/27382923-ne2023.1-110

Գրականություն

1. Այվազյան Է. Ի., Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա: Երևան, ԵՊՀ հրատ., 2016, 202 էջ:
2. Բրուտյան Գ. Ա., Տրամաբանություն, Երևան, «Գիտություն» հրատ., 1998, 213 էջ:
3. Асмус В. Ф. Логика. Госполитиздат, 1947, - 387 с
4. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. М.: МЦНМО, 2004, - 560 с.
5. Ибатулин И.Ж. Математические олимпиады. М.: Бином, 2013, - 358 с.
6. Левитин Е.С. Математическое образование и математика в современной цивилизации. Т. 1, URSS. 2011, 32 печ. л.
7. Шарыгин И.Ф., Шевкин А.В. Задачи на смекалку. М.: Просвещение, 2010, - 95 с.
8. Hardy G. H. A Mathematician's Apology. Cambridge: University Press, 1940, - p. 153.

Математические логические задачи как средство развития творческого мышления

Гагик Никогосян

Резюме

Ключевые слова: *доказать, опровергнуть, четность, делимость, инвариант, пространственное тело, развертка, умение*

Известно, что одной из образовательных целей школьного курса математики является формирование и развитие творческого и логического мышления учащихся. К сожалению, приходится констатировать, что при разработке и внедрении новых форм организации обучения не уделяется достаточного внимания совершенствованию содержания обучения и, соответственно, повышению эффективности. В процессе обучения не уделяется должного внимания формированию и развитию у учащихся интуиции, аналитического мышления, догадки, умения делать обоснованные выводы, что является серьезным препятствием для развития у них поискового и творческого мышления, научной интуиции.

В этом контексте в данной работе ставится задача выявить способствующую роль логических задач доказательства или опровержения, относительно пространственных тел и их разверток в процессе формирования и развития поисковых способностей, логического и творческого мышления учащихся, в чем и заключается научная педагогическая новизна работы.

В частности, рассматриваются такие логические задачи доказательства или опровержения, решение которых основано на методе использования инварианта. В первой части статьи сначала излагается сущность метода применения инварианта через закон исключения третьего, после чего обсуждаются задачи доказательства или опровержения, основанные на принципе постепенного усложнения, в решении которых непосредственно применяется инвариант. Вторая часть работы посвящена логическим задачам, связанным с пространственными телами. Рассматриваются логические задачи, основанные на принципе постепенного усложнения, связанные с пространственными телами и их разверток, с целью развития пространственно-творческого мышления учащихся через последние.

Mathematical Logical Problems as a Means of Developing Creative Thinking

Gagik Nikoghosyan

Summary

Key words: *prove, refute, parity, divisibility, invariant, spatial body, development, skill*

It is known that one of the educational goals of the school course in mathematics is the formation and development of creative and logical thinking of students. Unfortunately, we have to state that in the development and implementation of new forms of training organization, sufficient attention is not paid to improving the content of training and, accordingly, to increasing efficiency. In the learning process, due attention is not paid to the formation and development of students' intuition, analytical thinking, conjecture, the ability to draw reasonable conclusions, which is a serious obstacle to the development of their exploratory and creative thinking, scientific intuition.

In this work, the task is to identify the contributing role of the logical tasks of proof or refutation, regarding spatial bodies and their developments in the process of formation and development of exploratory skills, logical and creative thinking of students, which is the scientific pedagogical novelty of the work.

In particular, such logical problems of proof or refutation are considered, the solution of which is based on the method of using an invariant. In the first part of the article, the essence of the method of applying the invariant through the law of elimination of the middle is stated, then the problems of proof or refutation based on the principle of gradual complication are discussed, in the solution of which the invariant is directly applied. The second part of the work is devoted to logical problems related to spatial bodies. We consider logical tasks based on the principle of gradual complication, associated with spatial bodies and their sweeps, with the aim of developing the spatial and creative thinking of students through the latter.

Ներկայացվել է 10.04.2023 թ.
Գրախոսվել է 13.04.2023 թ.
Ընդունվել է տպագրության 25.05.2023 թ.